

# 一种频域谱均衡自调整迭代优化算法\*

罗中良, 蓝 燕, 陈治明

(惠州学院电子科学系, 广东 惠州 516007)

**摘要:** 传统的频域自调整算法直接对频谱进行运算, 不利于对信号的噪声分离。该文在频域采用对数功率谱表示保证了功率谱的正值特性且易于实现带遗忘因子平滑算法, 并针对算法的收敛速度与收敛精度之间的矛盾, 提出一种变遗忘因子的自调整算法, 推导了算法的收敛条件, 在此基础上设计了遗忘因子按响应谱取指数平均的自调整方法及相应的迭代算法。仿真验证了文中设计的优化谱均衡算法较传统的均衡算法时间上降低了近50%, 稳态误差减小了约90%。

**关键词:** 谱均衡; 参数自调整; 迭代优化算法

**中图分类号:** TP273.3   **文献标志码:** A   **文章编号:** 0529-6579(2015)05-0028-05

## A Frequency Spectrum Equalization Self-Adjusting Iteration Algorithm

LUO Zhongliang, LAN Yan, CHEN Zhiming

(Department of Electronic Science, Huizhou University, Huizhou 516007, China)

**Abstract:** Traditional frequency self-adjusting algorithm calculates the frequency spectrum directly, which will affect the noise extraction of the signal. Logarithm power spectrum is used to guarantee the positive-value characteristic of the power spectrum, and make the smoothing algorithm with forgetting factor easier to implement. To solve the contradiction between convergence speed and convergence precision of the fixed forgetting factor, a self-adjusting method with varied forgetting factor is proposed. The convergence condition is also deduced. The iteration algorithm whose forgetting factor is the exponential mean value of the response spectrum is designed. Simulation results show that the proposed spectrum equalization algorithm reduces the calculation time by 50%, the steady-state error by 90%, comparing to un-optimized algorithm.

**Key words:** spectrum equalization; parameter self-adjusting; iterative optimization algorithm

随机振动谱均衡的控制目的是使试件承受的振动功率谱与设定的参考功率谱一致, 通过对功率谱的估计, 利用均衡控制算法与参考谱进行比较迭代, 最终使控制谱收敛到参考谱<sup>[1]</sup>。在随机振动中, 由于不同控制对象的特性参数存在较大差别且系统参数不稳定的影响导致整个系统的动态特性发生改变。为了满足控制系统的大动态范围、高精度、均衡时间小等参数的要求, 对谱估计及均衡算

法提出了很高的要求<sup>[2-3]</sup>, 业界也进行了相关的研究, 如采用加权噪声功率谱估计算法, 较好的分离后平滑了噪声<sup>[4-5]</sup>; 引入分频率与变步长策略, 提高迭代控制效率、降低迭代运算量<sup>[6]</sup>; 采用并行化数据处理和振动环境谱编制方法, 提高机载设备振动环境实测数据处理效率<sup>[7]</sup>; 采用 Kalman 自适应滤波器实时跟踪控制对象阻抗特性, 对系统的输入信号进行滤波修正, 再实现参考谱复现方法

\* 收稿日期: 2014-10-18

基金项目: 广东省科技计划资助项目(2012B010100038); 广东省高等学校教学质量与改革工程本科类资助项目(粤高教函【2013】113号-113)

作者简介: 罗中良(1968年生), 男; 研究方向: 智能控制; 通讯作者: 陈治明; E-mail: 1276106@qq.com

等<sup>[8]</sup>，以及小波域的谱均衡算法<sup>[9-12]</sup>。这些算法改善了谱估计、谱均衡控制的精度，但算法的收敛性普遍缺乏定量的理论性分析，而是采用仿真加以验证。本文从谱均衡基本原理及传统自调整迭代算法出发，在频域对数功率谱形式上分析了遗忘因子对收敛速度和精度的影响，推导了算法收敛的依据，并在此基础上设计了遗忘因子按响应谱取指数平均的自调整方法及相应的迭代算法，满足收敛条件下得到了最速下降的遗忘因子，有效地解决了收敛速度与收敛精度的矛盾，为谱均衡的频域自调整迭代算法提供优化途径。

## 1 谱均衡自调整迭代算法

### 1.1 谱均衡控制原理

随机振动频谱均衡控制是相对于时域自适应控制器的频域实现，包括系统辨识和控制综合模块，其目的就是使振动系统在不同的负载及干扰下精确地重现设定的振动谱。对于传递函数为  $H(f)$  的振动系统，其激励  $X(f)$  与响应  $Y(f)$  的关系可表示为：

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (1)$$

在随机振动控制中，只关心频域的幅值特性，故将上式变换为输入输出信号自功率谱函数的关系式，即

$$P_{yy}(f) = |H(f)|^2 P_{xx}(f) \quad (2)$$

要使系统重现参考谱  $P_{rr}(f)$ ，即  $P_{yy}(f) = P_{rr}(f)$ ，则必须使激励信号的自功率谱  $P_{xx}(f)$  满足：

$$P_{xx}(f) = \frac{P_{yy}(f)}{|H(f)|^2} = \frac{P_{rr}(f)}{|H(f)|^2} \quad (3)$$

式 (3) 是随机振动试验中实现频谱均衡的基本公式。均衡的具体过程如图 1 所示。系统控制中通过不断修改激励谱  $P_{xx}$ ，以补偿被控系统的传输比  $H(f)$ ，并最终使它们的乘积与参考设定谱  $P_{rr}$  相一致，而实现系统控制必须先通过系统预辨识得到系统频响函数  $\hat{H}(f)$  的估计。

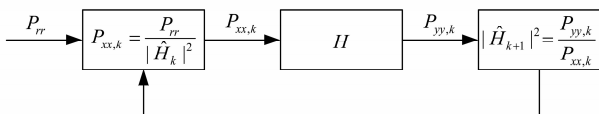


图 1 振动谱均衡原理

Fig. 1 Principle of vibration spectrum equalization

### 1.2 频率响应功率谱估计方法

传统的正弦激励法的测试时间较长且瞬态激励法精度较低，随机激励法是通过给待测系统施加一

个随机激励，测量系统的响应，以此计算系统的频响函数，它更接近于实际的振动环境，具有能量分布频带宽、测试效率高、易于控制的特点，并可通过对输入、输出信号的功率谱进行平均来提高频响函数的估计精度<sup>[13]</sup>。设待测系统的输入、输出分别为  $x(t)$ 、 $y(t)$ ，如果在对输入输出进行采样时，能够保证得到的输出序列  $\{y(n), n = 0, 1, \dots\}$  在时序上与输入序列  $\{x(n), n = 0, 1, \dots\}$  一一对应，对  $\{y(n)\}$ 、 $\{x(n)\}$  进行  $N$  点取样，运用 FFT 算法可以得到  $Y_k = DFT\{y(n)\}$ 、 $X_k = DFT\{x(n)\}$ ，由此得到谱估计值：

$$\begin{aligned} \hat{P}_{xx}(f_k) &= X_k^* X_k & \hat{P}_{xy}(f_k) &= X_k^* Y_k \\ \hat{P}_{yx}(f_k) &= Y_k^* X_k & \hat{P}_{yy}(f_k) &= Y_k^* Y_k \end{aligned} \quad (4)$$

求得频率响应函数：

$$\hat{H}(f_k) = \frac{\hat{P}_{xy}(f_k)}{\hat{P}_{xx}(f_k)}$$

或

$$\hat{H}(f_k) = \frac{\hat{P}_{yy}(f_k)}{\hat{P}_{yx}(f_k)} \quad (5)$$

在测试条件不变的情况下，系统一般近似为线性时不变系统。因而可对  $\{x(n)\}$  的估计谱进行平均，得到平滑的估计谱，以减小  $\hat{H}(f_k)$  的估计误差：

$$S_{yy,i}(f_k) = (1 - \rho) S_{yy,i-1}(f_k) + \rho \hat{P}_{yy,i}(f_k) \quad (6)$$

因此：

$$\hat{H}_i(f_k) = \frac{S_{xy,i}(f_k)}{S_{xx,i}(f_k)}$$

或

$$\hat{H}_i(f_k) = \frac{S_{yy,i}(f_k)}{S_{yx,i}(f_k)} \quad (7)$$

这里对估计谱作了指数平均，其中  $\hat{H}_i(f_k)$  表示第  $i$  次的  $\hat{H}(f_k)$  计算值， $\rho_i \in [0, 1]$  为遗忘因子。平均次数少则估计误差大，随着平均次数的增加，频响函数增益因子估计曲线  $|\hat{H}(f_k)|$  逐渐平滑，相应的主要模态参数计算的准确性提高，一般几十次平均可以得到非常光滑的频响函数。

### 1.3 谱均衡迭代算法

设图 1 系统频率响应  $H(f)$  的初始值  $\hat{H}_0(f)$ ，利用已知的被控系统的输入  $P_{xx,k}$  和响应输出  $P_{yy,k}$  求出它的传输比  $\hat{H}_{k+1}(f)$ ：

$$|\hat{H}_{k+1}(f)|^2 = \frac{P_{yy,k}(f)}{P_{xx,k}(f)} \quad (8)$$

求得被控系统的传输比  $\hat{H}_{k+1}(f)$  之后，就可以修正新的驱动谱  $P_{xx,k+1}$ ：

$$P_{xx,k+1}(f) = \frac{P_r(f)}{|\hat{H}_{k+1}(f)|^2} \quad (9)$$

将新的驱动谱  $P_{xx,k+1}$  激励系统后, 可测得新的  $P_{yy,k+1}$ , 求出新的传输比  $\hat{H}_{k+2}(f)$ 。从理论上讲, 假如系统没有噪声干扰且是理想的线性系统, 系统参数没有漂移现象, 那么上述算法经依次迭代即可达到理想的收敛状态。然而由于存在测量误差及被控系统的非线性和时变性, 每次求得的传输比不可能完全相同。因此, 必须通过反复迭代的过程才能使  $P_{yy}$  收敛于  $P_r$ , 达到并保持均衡状态。由于频谱均衡仅要求响应信号  $y(t)$  的谱形与激励信号  $x(t)$  一致, 并没有对两者的相位信息作出要求, 对系统的模型只需用  $\hat{H}_1(f)$  表述, 因此频谱均衡算法称为非参数自调整算法或频域自调整算法。

对式 (1) 以归一化频率变换到离散域, 并考虑系统噪声及测量误差  $n(t)$  时

$$P_{yy,i}(f_k) = |\hat{H}_i(f_k)|^2 P_{xx,i}(f_k) + P_{nn,i}(f_k) \quad (10)$$

式中  $P_{nn,i}(f_k)$  是噪声  $n(t)$  的自谱密度的第  $i$  次计算值, 由文献 [10] 可以得到:

$$S_{yy,i}(f_k) = (1 - \rho) S_{yy,i-1}(f_k) + \rho [|\hat{H}_i(f_k)|^2 P_{xx,i}(f_k) + P_{nn,i}(f_k)] \quad (11)$$

$$|\hat{H}_{k+1}(f_k)|^2 = \frac{S_{yy,i}(f_k)}{P_{xx,i}(f_k)} \quad (12)$$

$$P_{xx,i+1}(f_k) = \frac{P_r(f)}{|\hat{H}_{k+1}(f_k)|^2} \quad (13)$$

式(11) - (13)的自调整迭代算法很难定量地分析其收敛性能, 且无法直接利用 2.1 进行小波变换后的平滑算法。因此, 下面研究频域自调整算法在对数坐标中的实现, 并定量分析其收敛性能。

## 2 变遗忘因子的谱均衡优化迭代算法

### 2.1 对数域频域自调整算法及其收敛性

传统的频域自调整算法直接对频谱进行运算, 不利于对信号的噪声分离, 在频域采用对数功率谱一方面能保证功率谱的正值特性, 另一方面更利于采用先进的算法对其平滑。令

$$r = \ln[P_r(f_k)], p_i = \ln[P_{yy,i}(f_k)],$$

$$y_i = \ln[S_{yy,i}(f_k)],$$

$$h_i = \ln[|\hat{H}_i(f_k)|^2], x_i = \ln[P_{xx,i}(f_k)]$$

相应地响应谱的指数平均变为

$$S_{yy,i}(f_k) = [S_{yy,i-1}(f_k)]^{(1-\rho)} [\hat{P}_{yy,i}(f_k)]^\rho \quad (14)$$

其对数坐标形式为

$$y_i = (1 - \rho)y_{i-1} + \rho p_i \quad (15)$$

基于对数变换的频域自调整迭代算法表示为:

$$y_i = (1 - \rho)y_{i-1} + \rho(x_i + h_i + e_i) \quad (16)$$

$$h_{i+1} = y_i - x_i \quad (17)$$

$$x_{i+1} = r - h_{i+1} \quad (18)$$

其中  $e_i$  表示与  $x_i$ 、 $y_i$  不相关的零均值噪声。综合式 (16) - (18) 可得

$$y_i = (1 - \rho)y_{i-1} + \rho p_{i-1} + \rho(r - y_{i-1} + e_i - e_{i-1})$$

由于  $y_{i-1} = (1 - \rho)y_{i-2} + \rho p_{i-1}$ , 从上式可得:

$$y_i = \frac{\rho r + \rho(1 - z^{-1})e_i}{1 - 2(1 - \rho)z^{-1} + (1 - \rho)z^{-2}} \quad (19)$$

其特征根为  $(1 - \rho) \pm j[\rho(1 - \rho)]^{1/2}$ , 幅值为  $(1 - \rho)^{1/2}$ , 因此当  $0 < \rho < 1$  时式 (16) - (18) 表示的频域自调整迭代算法收敛于  $r$ 。当系统收敛后

$$E\{[y_i - r]^2\} = \frac{2\rho\sigma_e^2}{4 - 3\rho} \quad (20)$$

式中,  $\sigma_e^2$  为噪声的方差。可以看得, 当  $\rho$  值较大时, 算法将有较快的收敛速度, 而当随着  $\rho$  值的减小, 算法的收敛精度提高。

### 2.2 变遗忘因子的谱均衡优化迭代算法

从上分析知,  $\rho$  值的大小需要在算法的收敛速度与收敛精度之间折衷, 设想当算法的运行初期时取较大的  $\rho$  值, 以提高收敛速度; 之后, 减小  $\rho$  值以提高收敛精度。下面来研究  $\rho_i$  的变化规律, 从而得到最优的系统性能。

以遗忘因子为对响应谱取指数平均得

$$y_i = (1 - \rho_i)y_{i-1} + \rho_i p_i \quad (21)$$

其中  $\rho_i \in [0, 1]$ , 它随迭代次数的增加而减小。将

$$p_i = x_i + h_i + e_i$$

代入上式得

$$y_i = \hat{y}_i + \rho_i e_i \quad (22)$$

其中

$$\hat{y}_i = (1 - \rho_i)y_{i-1} + \rho_i(x_i + h_i) \quad (23)$$

在不考虑系统噪声时, 使控制谱与参考谱相等并取  $h_i$  的估计值, 这样得到自调整算法迭代公式为

$$x_i = \frac{1}{\rho_i}[r - (1 - \rho_i)y_{i-1}] - h_i \quad (24)$$

其中系统的频率响应函数由卡尔曼滤波器进行估计, 其为

$$h_{i+1} = h_i + \alpha_i[y_i - (1 - \rho_i)y_{i-1} - \rho_i(h_i + x_i)] \quad (25)$$

通过对费用函数  $E\{(h_i - h)^2\}$  最小化, 其中  $h$  是系统频率响应函数的真值, 得到的  $\alpha_i$  应满足:

$$\frac{1}{\alpha_i \rho_i} = 1 + \frac{1}{\alpha_{i-1} \rho_{i-1}} \quad (26)$$

此时有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E\left\{\frac{(y_r - r)^2}{\rho_i}\right\} = \sigma_e^2 \quad (27)$$

上式说明了优化的频域自调整迭代算法非常好的一个特性，即当  $\alpha_i$  以式 (26) 规则选择时，系统响应谱的波动随遗忘因子  $\rho_i$  的减小而趋向于零。可得

$$x_{i+1} = x_i + \left[ \frac{1}{\rho_i} - 1 \right] [y_{i-1} - r] - \left[ \frac{1}{\rho_i} - 1 + \alpha_i \right] (y_i - r) \quad (28)$$

如此不断的迭代，控制功率谱将收敛于参考功率谱。

### 2.3 迭代算法仿真

仿真取系统激励初值与系统响应初值为零，系统噪声取均值为零、方差为 1 的高斯噪声，设定参考谱  $r$  为 10，系统的频率响应函数  $h$  取 1，系统频率响应函数初值  $h_0$  取 0。图 2 是没有加入噪声时的基于对数变换频域自调整迭代算法仿真结果。

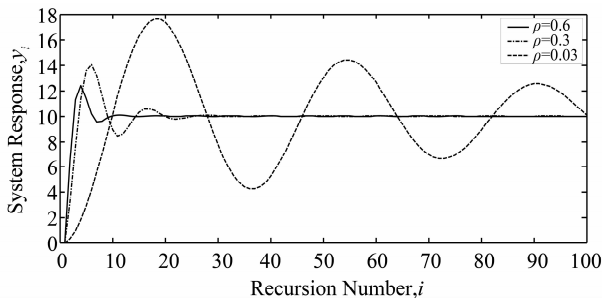


图 2 基于对数变换的频域自调整算法仿真 (未加入噪声)  
Fig. 2 Simulation of adaptive regulation algorithm based on logarithmic transformation (un-noised)

图 2 较明显的表明随着  $\rho$  的减小暂态时间增长，系统的响应的调整速度变慢；而当系统加入噪声时，如图 3 所示。小的  $\rho$  值确提高了消除系统噪声的能力，但这是以系统的响应速度为代价的，两者是一个不可调和的矛盾；而对于优化的频域自调整迭代算法，有效地解决了这一对矛盾，其仿真结果如图 4 所示。从图 4 可以看到系统不仅具有快速的响应性能，而且具有较强的消除系统噪声的能力。比较图 4 (a)、(b)，可以看出当  $\rho_i$  的下降速率增大时，收敛速度和抗干扰能力均有提高，然而如果的下降速率大于  $1/i$  时，依据式 (26)  $\alpha_i$  的取值必将发散，即随  $i$  值的增大而增大，这样将造成计算上的溢出，因此在保证算法可靠性的前提下的下降速率不应大于。上述结果可以表明优化的频谱均衡算法较传统的均衡算法的均衡时间降低了近 50%，稳态误差减低了约 90%，均衡结果较理想。

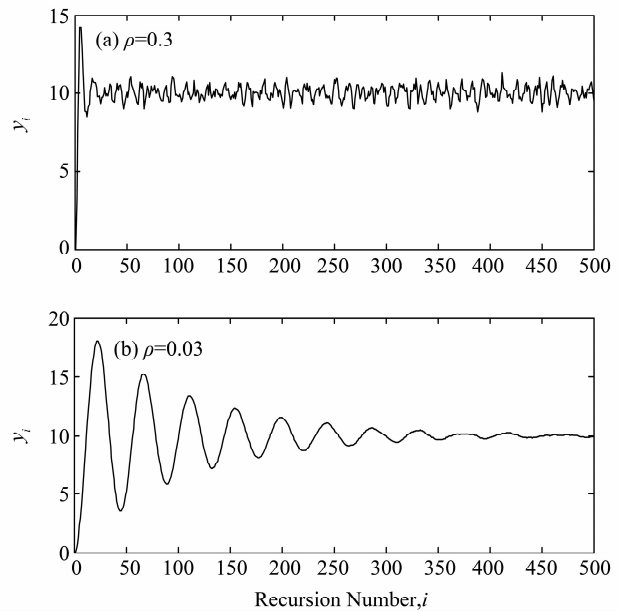


图 3 基于对数变换的频域自调整算法仿真 (加入噪声)  
Fig. 3 Simulation of adaptive regulation algorithm based on logarithmic transformation (noised)

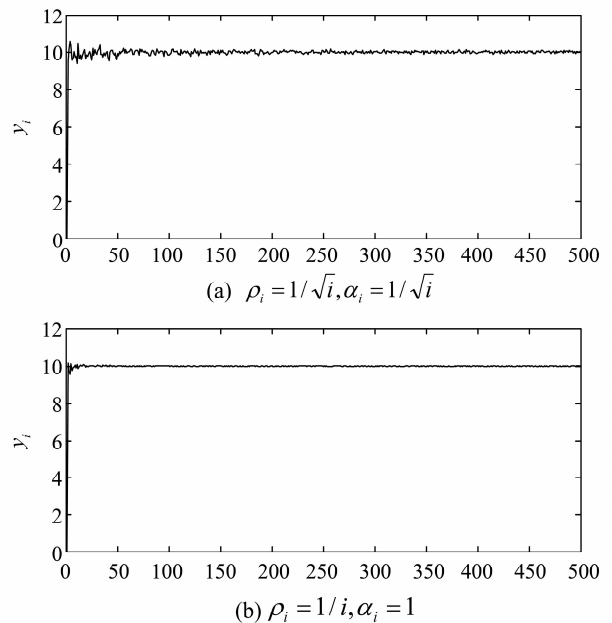


图 4 优化的频域自调整算法仿真 (加入噪声)  
Fig. 4 Simulation of optimized adaptive regulation algorithm (noised)

## 3 结 论

采用对数功率谱保证了功率谱的正值特性，分析了遗忘因子  $\rho$  值对算法收敛速度与精度之间影响，提出均衡算法迭代初期应取较大值以提高收敛速度，后期应取较小值以提高算法的收敛精度。并基  
(下转第 48 页)

- tion[M]. New York: Macmillan, 2012:465-477.
- [9] GIROSI F, POGGIO T. Networks and the best approximation property[J]. Biological Cybernetics, 2012, 63: 169-176.
- [10] ER M J, WU S Q. A fast learning algorithm for parsimonious fuzzy neural systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 126: 337-351.
- [11] CHEN S, COWAN C F N, GRANT P M. Orthogonal least squares algorithm for radial basis function network [J]. IEEE Trans Neural Networks, 2011, 22: 302-310.
- [12] LU Y, SUNDARARAJAN N, SARATCHANDRAN P. A sequential learning scheme for function approximation by Using minimal radial basis function networks[J]. Neural Computation, 2012, 19(2): 461-478.
- [13] KADIRKAMANATHAN V, NIRANJAN M. A function estimation approach to sequential learning with neural networks[J]. Neural Computation, 2011, 16(4): 954-975.
- [14] CHO K B, WANG B H. Radial basic function based adaptive fuzzy systems and their applications to system identification and prediction[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 26: 344-354.
- [15] JANG J S R. ANFIS: adaptive-network-based fuzzy Inference system[J]. IEEE Trans Syst, Man, Cybern, 2012, 23: 665-684.

(上接第 31 页)

于此思想,设计了遗忘因子按响应谱取指数平均的自调整方法及相应的迭代算法,在算法的收敛速度与收敛精度之间取得较好的平衡。仿真结果表明优化的频谱均衡算法较传统的均衡算法的均衡时间降低了近 50%,稳态误差减低了约 90%。

#### 参考文献:

- [1] 刘小勇,罗中良,罗明珠.基于自适应逆控制的冲击振动控制方法[J].中山大学学报:自然科学版,2008,47(5):49-53.
- [2] 许伯强,孙丽玲,李和明.基于高频率分辨力谱估计技术与优化算法的异步电动机转子故障检测新方法[J].中国电机工程学报,2013,33(3):140-147.
- [3] 陈家焱,陈章位,贺惠农,等.非高斯随机振动试验并行控制策略研究[J].机械工程学报,2012,48(4):193-198.
- [4] 冯炎,安宝坤.改进型加权噪声功率谱估计算法[J].重庆科技学院学报,2014,16(4):147-149.
- [5] 冯炎,尼玛扎西.基于频带间相关性的加权噪声功率谱估计[J].信息与电子工程,2010,8(4):431-435.
- [6] 张芄,蔡萍,武博.基于自适应逆控制的随机振动控制算法研究[J].振动与冲击,2013,32(22):163-167.
- [7] 刘力宏,李五一,杜晓坤,张书明.机载设备振动环境实测数据处理并行算法[J].科学技术与工程,2015,15(20):72-77.
- [8] 关广丰,王海涛,熊伟.随机振动功率谱再现自适应控制算法研究[J].振动与冲击,2011,30(3):1-4.
- [9] 赵淑红,朱光明.用小波变换谱均衡法提高地震资料的分辨率[J].西安科技大学学报,2007,27(2):255-259.
- [10] 罗中良,汪华斌,陈治明,等.面向随机振动功率谱估计的小波变换去噪算法理论分析[J].中山大学学报:自然科学版,2012,51(2):12-16.
- [11] 曲蕾,王京,杨斌虎.X滤波自适应逆控制算法及在液压位置控制系统中的应用[J].北京科技大学学报,2008(3):163-166.
- [12] 陈传仁,周熙襄.小波谱白化方法提高地震资料的分辨率[J].石油地球物理勘探,2000(6):54-59.
- [13] 孟新宇,宁辉,王道波,等.频域响应函数估计的非参数辨识法[J].振动与冲击,2013,32(14):174-179.